Torsten Fritzlar

Förderung mathematisch begabter Kinder im mittleren Schulalter

Zahlreiche Förderbemühungen für mathematisch interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler können auf eine lange Tradition zurückblicken,[1] viele weitere sind insbesondere auch für die Primarstufe in den letzten Jahren hinzugekommen. Allerdings liegen bezüglich der Förderung mathematisch begabter Kinder im mittleren Schulalter nur wenige Erfahrungen vor; auch zur speziellen Entwicklung mathematischer Begabungen in dieser Altersstufe gibt es bislang relativ wenige gesicherte wissenschaftliche Erkenntnisse (Fritzlar et al., 2006). In diesem Artikel möchte ich Überlegungen zur inhaltlichen Gestaltung von Fördermaßnahmen im mittleren Schulalter darstellen, begründen und an – aus Platzgründen leider nur wenigen – Beispielen veranschaulichen.
Bei der Entwicklung eines Förderkonzeptes muss eine Vielzahl von Entscheidungen getroffen werden. Dabei kann es hilfreich sein, zu akzeptieren, dass nicht alle diese Entscheidungen aus dem aktuellen wissenschaftlichen Erkenntnisstand begründet werden können (Kießwetter & Nolte, 1996; Waldmann & Weinert, 1990). Es gibt Schlimmeres:

> „… in many cases the psychological sensitivity and the sure instinct of educators will do the job. Uncorroborated scientific assumptions and pseudo-theories may do more harm than good, because here the lack of objectifiable knowledge would be replaced by subjective certainty” (Weinert & Waldmann, 1986, 50).

Allerdings scheint es dann besonders wichtig, sich die den Entscheidungen zugrunde gelegten Vorstellungen und Erfahrungen bewusst zu machen und diese immer wieder kritisch zu hinterfragen. Ich möchte daher zunächst mein *Bild von Mathematik* und die damit zusammenhängenden *Vorstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* und *zu mathematischen Begabungen* knapp skizzieren.

---

[1] Beispielsweise feiert die von Studierenden der Friedrich-Schiller-Universität Jena herausgegebene mathematische Schülerzeitschrift „Die Wurzel“ in diesen Tagen ihr vierzigjähriges Bestehen.

1 Einrahmende Überlegungen

Es gibt weder eine einheitliche Definition von Mathematik noch allgemein akzeptierte Auffassungen über die Qualität mathematischen Wissens. Schon der Mathematiker und Mathematikdidaktiker Hans Freudenthal stellte 1986 fest:

> „Die Definition der Mathematik wechselt. Jede Generation und jeder scharfsinnige Mathematiker innerhalb einer Generation formuliert eine Definition, die seinen Fähigkeiten und Einsichten entspricht“ (Freudenthal in Davis & Hersh, 1986, 4).

Dennoch sind seit längerer Zeit sowohl in der Fachwissenschaft als auch in der Fachdidaktik allgemein eine stärkere Betonung des Prozesscharakters von Mathematik und eine Hinwendung zu einer mehr informellen und inhaltlichen Sicht auszumachen, die auch spielerische und ästhetische Aspekte einbezieht (z. B. Asselborn et al., 1998). Damit zusammenhängend wird Mathematik nicht mehr nur als Quelle unveränderlicher Wahrheit und nicht hinterfragbarer Gewissheit gesehen, vielmehr wird sie auch durch die Stichworte „Wachstum“ und „Veränderung“ beschrieben (Nickson, 1992). Für mich ist Mathematik *ein prinzipiell unsicheres, kreatives Produkt von Forschergemeinschaften, das historisch gewachsen und kulturell eingebunden ist*.

Vor diesem Hintergrund kann die charakteristische Tätigkeit einer Mathematikerin oder eines Mathematikers – in Anlehnung an Karl Kießwetter (z. B. Kießwetter, 2006) – als *Theoriebildungsprozess* (Abb.1) beschrieben werden (vgl. auch Freudenthal, 1973). Dieser beginnt in der Regel mit der Exploration einer mathematisch reichhaltigen Situation, aus der eine Anfangsfragestellung gewonnen wird; gelegentlich ist eine solche auch schon vorgegeben.[2] Durch deren Bearbeitung, durch Variationen und Ausweitungen können sich weitere Arbeitsanlässe ergeben – ein Kreislauf aus Problembearbeitungen und dem Entwickeln weiter(führend)er Problemstellungen wird in Gang gesetzt. Aus den dabei entstehenden Ergebnissen und Methoden, aus entwickelten Strategien und Hilfsmitteln, aus den gebildeten Begriffen und den gefundenen logischen Zusammenhängen erwächst ein „Theoriegewebe“, das schließlich noch zu optimieren ist (beispielsweise in Bezug auf Eleganz, Passung an bereits Vorhandenes, Verallgemeinerungsfähigkeit), das konserviert und in bereits vorhandene Wissensbestände integriert werden muss (vgl. auch Kießwetter, 2006).

[2] Daher ist dieser Prozessschritt in Abb. 1 durch einen gestrichelten Rahmen gekennzeichnet.

Abb. 1 zeigt ein vorläufiges, vereinfachtes Modell eines derartigen Theoriebildungsprozesses.[3]

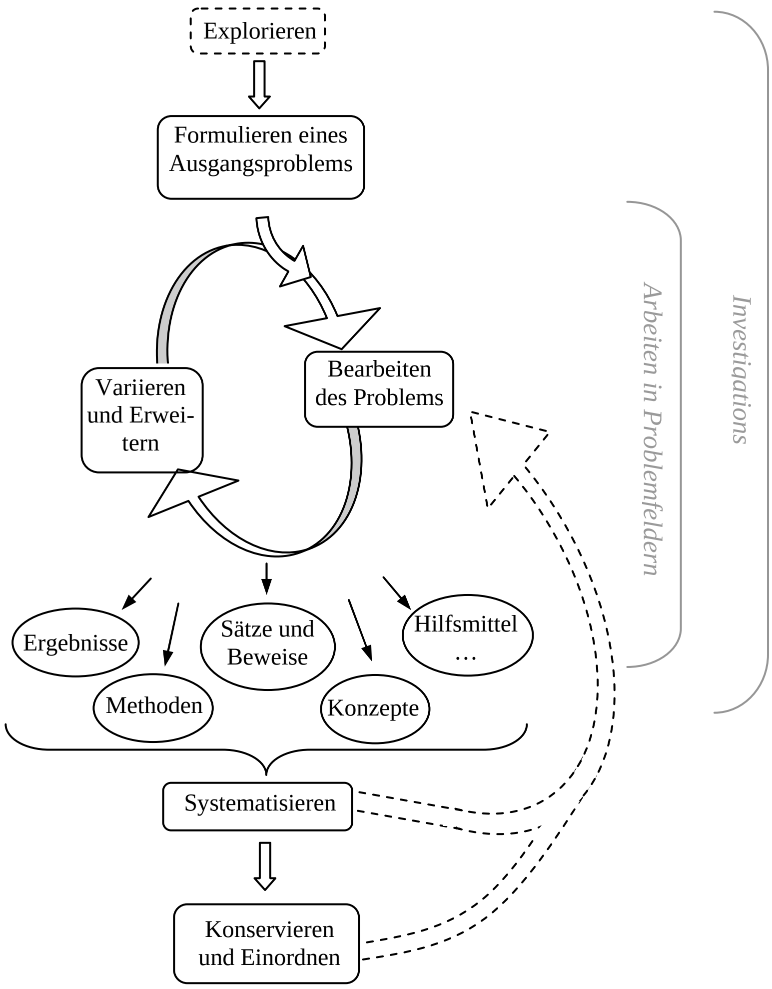


Abb. 1: Theoriebildungsprozess in der Mathematik

Wesentliches Kernelement eines solchen Theoriebildungsprozesses ist die intensive Auseinandersetzung mit Bestimmungs-, Entscheidungs- oder Entdeckungsproblemen (vgl. auch Pólya, 1973). Auch daher sollte Problem-

[3] Beispielsweise erfasst das Modell noch keine sozialen Aspekte im Zusammenhang mit dem Arbeiten in „Forschungsteams“. Die Kennzeichnungen im rechten Teil der Abbildung werden später im Text erläutert.

orientierung eine wesentliche didaktische Grundorientierung des Lehrens und Lernens von Mathematik sein, nicht nur im Rahmen der Begabtenförderung. In Anlehnung an Zimmermann (1991a, 1991b, 2001; Fritzlar, 2003) lassen sich wesentliche *Leitideen eines problemorientierten Lehrens und Lernens von Mathematik* wie folgt zusammenfassen:

- *Entdeckendes Lernen*

Die Schülerinnen und Schüler können möglichst oft durch Bereitstellung offener Situationen selbstständig, (nach-)entdeckend und kreativ arbeiten. Dabei werden ihre intuitiven und heuristischen Vorstellungen aufgegriffen und gemeinsam mit ihnen weiterentwickelt.

- *Heuristischer Erfahrungsschatz*

Die Lernenden können durch möglichst häufiges eigenständiges mathematisches Tätigsein ihren heuristischen Erfahrungsschatz ausweiten. Dabei kommt dem Entwickeln von Vermutungen, dem Argumentieren und Begründen, dem „Entdecken“ von Strukturen und dem konstruktiven Umgang mit diesen eine besondere Bedeutung zu.

- *Vernetzung*

Die Schülerinnen und Schüler haben möglichst oft Gelegenheit, Querverbindungen innerhalb der Mathematik und aus dieser in andere Bereiche ihrer Umwelt zu erfahren und zu konstruieren.

- *Kommunikation und Kooperation*

Die Schülerinnen und Schüler kommunizieren mithilfe von und über Mathematik und sind möglichst oft kooperativ mathematisch tätig.

- *Einstellung zur Mathematik*

Möglichst vielen Schülerinnen und Schülern werden zumindest Teilerfolge bei der Bearbeitung mathematischer Problemstellungen ermöglicht. Auch dadurch entwickeln oder behalten sie eine positive Einstellung zur Mathematik.

- *Differenzierung und individualisierende Förderung*

Es werden Problemsituationen initiiert, in denen sich Möglichkeiten zu einem differenzierten Vorgehen und Lernen der Schülerinnen und Schüler – entsprechend ihren verschiedenen Lernstilen und Begabungsausprägungen – und damit Möglichkeiten einer differenzierenden Förderung eröffnen.

Zur Begründung einer stärkeren Problemorientierung des Mathematiklernens lassen sich neben dem Bild von Mathematik auch innermathematische Argumente – insbesondere die Ergebnisse von Kurt Gödel (1931) – und

Erfahrungen aus der Mathematikgeschichte (z. B. Zimmermann, 1991a) anführen. Darüber hinaus kann auf vielfältige pädagogische Gründe, die zum Teil bereits von Dewey im amerikanischen Pragmatismus und in der deutschen Reformpädagogik aufgegriffen wurden, auf hirnphysiologische, psychologische (z. B. Spitzer, 2002) und philosophische Gründe – man denke beispielsweise an konstruktivistisch orientierte Wissens- und Erkenntnistheorien (z. B. Glasersfeld, 1998) – verwiesen werden.

Wenn eine „mathematische Begabung“ eine „Begabung zu mathematischem Tätigsein“ ist (und was sollte sie sonst sein), so werden die Vorstellungen zu mathematischen Begabungen selbstverständlich – allerdings möglicherweise unbewusst – vom jeweiligen Bild von Mathematik beeinflusst.
Fasst man mathematisches Tätigsein als ein Ausarbeiten von Theorien insbesondere durch das darin eingebettete Bearbeiten mathematischer Probleme auf, dann sind vor allem die in der Abb. 2 aufgeführten *mathematikspezifischen Kompetenzen* – im Sinne eines kognitiven Kompetenzbegriffs – die Potenziale zu hoher mathematischer Performanz. Sie charakterisieren damit die Ausprägungen mathematischer Begabung. Diese Aufzählung basiert im Wesentlichen auf umfangreichen empirischen Untersuchungen von Friedhelm Käpnick zu potenziell mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässlern (Käpnick, 1998). Mit Asterisken sind ergänzende „Kategorien mathematischer Denkleistungen“ markiert, die Karl Kießwetter zur Identifizierung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler am Ende des sechsten Schuljahrgangs benutzt (Kießwetter, 2006). Während das eigenständige Finden von sinnvollen Anschlussproblemen auch für begabte Grundschulkinder nach aller Erfahrung tatsächlich noch außerordentlich schwierig ist, könnte der erfolgreiche Umgang mit mathematischer Komplexität auch schon im Grundschulalter ein wichtiges Merkmal mathematischer Begabungen sein (Kießwetter & Nolte, 1996). Diesbezüglich stehen gesicherte empirische Befunde noch aus. An dieser Stelle wird auch die Dynamik einer mathematischen Begabung deutlich, die hoffentlich in den anderen Teilen der Abb. 2 ebenso erkennbar ist.
Zwar gibt es seit einigen Jahren in Deutschland verstärkte Bemühungen hinsichtlich der Erforschung mathematischer Begabungen insbesondere im Grundschulalter (z. B. Fuchs, 2006; Heinze, 2005; Nolte, 2004), allerdings bleiben noch viele Fragen unbeantwortet. Unstrittig ist allerdings, dass sich besondere mathematikspezifische Kompetenzen nur auf der Grundlage *spezifischer kognitiver Strukturen und Prozesse* (in Abb. 2 mit K gekennzeichnet) und *umfangreicher spezifischer Erfahrungen* (E) entwickeln

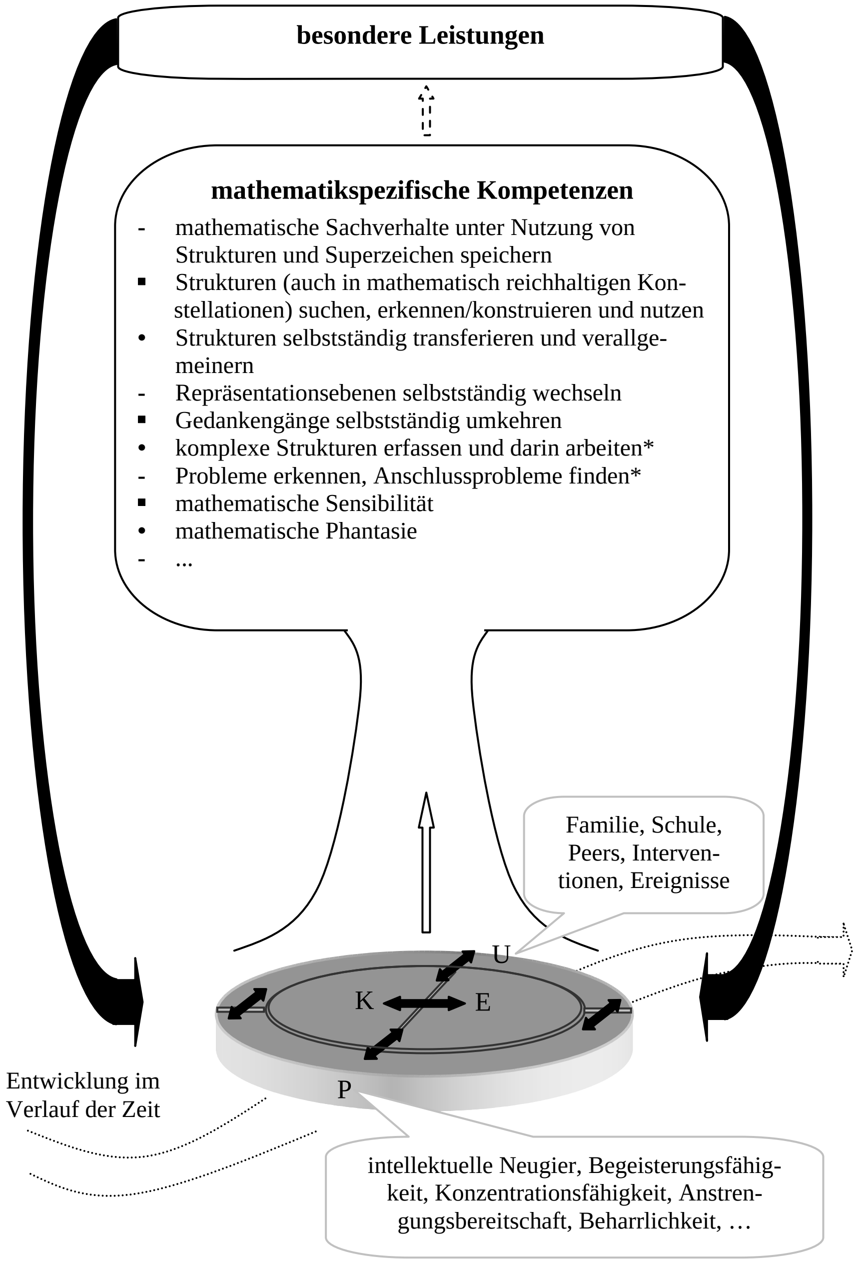


Abb. 2: Zu mathematikspezifischen Kompetenzen

können.[4] Daher ist es besonders wichtig, frühzeitig entsprechende Erfahrungsmöglichkeiten beispielsweise durch passende Förderangebote zu schaffen. Daraus folgt aber auch die große Bedeutung *fachbezogener begabungsstützender Persönlichkeitsmerkmale* (P) wie Begeisterungsfähigkeit, Anstrengungsbereitschaft und Beharrlichkeit, die notwendig sind, um einen entsprechenden Wissens- und Erfahrungsschatz aufzubauen. Fraglos nimmt darüber hinaus auch die *Umwelt* (U) Einfluss auf die Entwicklung spezifischer Kompetenzen. Diese vier „Basiskomponenten" sind selbstverständlich weder unabhängig voneinander noch zeitlich stabil.

Unterschiedliche Aufzählungszeichen in der Liste mathematikspezifischer Kompetenzen sollen veranschaulichen, dass bei einer mathematischen Begabung nicht alle diese Kompetenzen in gleichem Maße ausgeprägt sein müssen und dass es keinen einfachen additiven Zusammenhang bei diesen gibt. Beispielsweise scheint „mathematische Phantasie" bzw. Kreativität eher ein begabungstypendifferenzierendes Merkmal zu sein (z. B. Kießwetter, 1992). Auch das räumliche Vorstellungsvermögen, dessen hohe Ausprägung nach meinen Erfahrungen nicht typisch ist für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler, bereichert das Spektrum möglicher Begabungsausprägungen weiter. Astrid Heinze führt in ihrer Dissertation weitere Merkmale „eines mathematischen Talents im Grundschulalter" an, beispielsweise ein „Bedürfnis nach plausiblen, mathematischen Erklärungen" (Heinze, 2005, 39). Meines Erachtens sind gerade auch bezüglich dieses Merkmals weitere Untersuchungen notwendig, die sich unter anderem um eine Klärung des Attributs „plausibel" bemühen sollten.

Mathematikspezifische Kompetenzen *können* sich situations- und aufgabenspezifisch in besonderen Leistungen manifestieren. In dieser Einschränkung liegen nicht nur Schwierigkeiten hinsichtlich der Identifizierung von Begabungen begründet, darüber hinaus ergeben sich auch pädagogische Herausforderungen: Durch spezifische Fördermaßnahmen sollten sich mathematisch begabte Kinder auch als besonders leistungsfähig erleben, sodass es zu positiv verstärkenden Rückkopplungen auf die Basiskomponenten kommen kann.

Insgesamt scheint es mir wichtig, sich der durch die schwarzen Pfeile symbolisierten *Wechselwirkungen* und *Rückkopplungen* sowie der *Dynamik aller Komponenten* bewusst zu sein, die eben auch kognitive Strukturen betreffen, wie neuere Untersuchungen zur Neuroplastizität und zu neurophysiologischen Reifungsprozessen nachweisen konnten (z. B. Spitzer, 2002; Stern et al., 2005).

---

4 Man vergleiche auch Ergebnisse der Expertiseforschung, die die Bedeutung der Qualität und Quantität einer spezifischen Wissensbasis deutlich machen.

2 Schlussfolgerungen für die Konzeption von Fördermaterialien

Vor dem Hintergrund des skizzierten Bildes von Mathematik, der Vorstellungen zum Lehren und Lernen und zu mathematischen Begabungen sollten bei der Konzeption von Fördermaßnahmen weniger mögliche Inhalte, sondern eher die bei den Schülerinnen und Schülern angestrebten *Prozesse* im Mittelpunkt stehen, die sich auch aus den einrahmenden Überlegungen ergeben. Von diesen ausgehend sollten Fördermaterialien einem Spektrum entstammen, das bei offenen Problemen beginnt und bis zu Theoriebildungen in der Elementarmathematik reicht. Dabei bezeichne ich ein Problem als offen, wenn es den Bearbeitern Raum für eigene Entscheidungen lässt durch eine un- oder unterbestimmte Start- oder Zielsituation oder beides (Pehkonen, 2004). Für die Begabtenförderung besonders wichtige Elemente dieses Spektrums sind neben dessen Endpunkt so genannte Problemfelder und die der englischen Tradition entstammenden Investigations.

2.1 Arbeiten in Problemfeldern

Ein Problemfeld ist eine kleine Sammlung irgendwie zusammenhängender Probleme oder eine Folge aufeinander aufbauender Probleme. Beim Arbeiten in einem Problemfeld werden nur – wie es Abb. 1 andeutet – Teile eines Theoriebildungsprozesses durchlaufen. Das Entwickeln eigener Fragestellungen ist den Bearbeitenden zu einem großen Teil abgenommen, wobei die Elemente eines Problemfeldes stets als erweiterbare Angebote aufgefasst werden sollten. Die Teilprobleme sollten verschiedene Bearbeitungsniveaus, -ansätze und Hilfsmittel erlauben sowie – sofern sie nicht aufeinander aufbauen – unterschiedliche Arbeitsrichtungen und damit individuelle Ziele ermöglichen.

Durch die Vorgabe eines Problemfeldes kann die Bearbeitung bis zu einem gewissen Grade strukturiert und angeleitet werden; beispielsweise lassen sich durch eine Zerlegung in Teilprobleme und deren passende Anordnung mögliche Bearbeitungswege aufzeigen. Wichtig scheint mir auch, dass dadurch eine Überwältigung der oder des Bearbeitenden durch zu umfangreiche oder zu komplexe Konstellationen vermieden werden kann. Daher ist das Arbeiten in Problemfeldern nicht nur, aber insbesondere für heterogene oder wenig erfahrene Schülergruppen geeignet.

Abb. 3 zeigt ein Beispiel, das abhängig von den Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler bereits im Grundschulalter, aber auch später noch erfolgreich einsetzbar ist.

Bei diesen kombinatorischen Fragestellungen sollen aus mathematischer Sicht Anzahlen von Kombinationen mit Wiederholung bzw. von ungeordneten Stichproben mit Zurücklegen bestimmt werden. Das erste Teilproblem bietet einen recht leichten Einstieg, bei der Auseinandersetzung damit können die Schülerinnen und Schüler mit konkreten Materialien, mit Skizzen, Tabellen oder auch auf der rein symbolischen Ebene arbeiten. Eine Zählstrategie ist dabei sehr hilfreich und kann erfahrungsgemäß von vielen Schülerinnen und Schülern gefunden werden. Spätestens für die erfolgreiche Beantwortung nachfolgender Fragestellungen müssen sich die Bearbeitenden allerdings vom Hantieren mit konkreten Materialien lösen, sie müssen auf der Grundlage eigenständig konstruierter Muster systematisch und wahrscheinlich über längere Zeit konzentriert arbeiten.

Beim Eismann

Andrea und Markus treffen sich nach der Schule im Eiscafe auf dem Marktplatz. Dort gibt es sechs verschiedene Eissorten: Schokolade, Vanille, Erdbeere, Zitrone, Walnuss und Banane.

Andrea möchte eine Tüte mit zwei Kugeln kaufen. Für jede Kugel kann sie aus den sechs Sorten auswählen, doch es fällt ihr sehr schwer, sich zu entscheiden. Wie viele Möglichkeiten hat Andrea?

Markus schafft drei Kugeln Eis. Aus wie vielen Möglichkeiten kann er auswählen?

Gestern gab es noch eine siebente Eissorte: Nugat. Zwischen wie vielen Möglichkeiten hätten sich Andrea und Markus gestern entscheiden können?

Stell dir vor, es gäbe morgen nicht sechs Sorten Eis, sondern zwölf verschiedene Eissorten. Wie viele Möglichkeiten gäbe es dann für Andrea?

Abb. 3: Beim Eismann

Die Teilprobleme des Problemfelds „Beim Eismann“ besitzen einerseits einen ansteigenden Schwierigkeitsgrad, andererseits kann bei deren Bearbeitung stets auf bereits gesammelte Erfahrungen und erreichte Ergebnisse zurückgegriffen werden. Dagegen sind im zweiten Beispiel „Sudoku selbstgemacht“ (Abb. 4) Probleme zusammengetragen, die zwar thematisch eng verknüpft, sonst aber weitgehend unabhängig voneinander sind.

Insgesamt ist dieses Problemfeld anspruchsvoller als das erste. Die größte Herausforderung und das aus mathematischer Sicht vielleicht interessanteste Problem ist Elkes Versuch, die Anzahl aller ausgefüllten 4-Sudokus zu ermitteln. Dennoch können auch hier bereits Fünftklässlerinnen und -klässler

Sudoku selbst gemacht!

Die Schülerinnen und Schüler der Klasse 5c wollen ein Sudoku-Rätselheft für Kinder herstellen. Kerstin hat schon einige Vorschläge für 4-Sudokus. Überprüfe, ob Kerstins Rätsel lösbar sind!

4			
		3	
		1	
	3		

		3	
	1		
			2
4		1	

3			
			4
	3	1	

Heidi will mit ihren Freundinnen einige schwierige Sudoku-Rätsel herstellen. Findet heraus, wie viele Zahlen sie für ein Rätsel mindestens vorgeben müssen, damit es eindeutig lösbar ist! Welche Zahlen können dabei verwendet werden? Wie können die Zahlen im 4×4-Quadrat angeordnet werden?

Elke will erst einmal herausfinden, wie viele verschiedene ausgefüllte 4-Sudokus es überhaupt gibt. Wie würdet ihr dabei vorgehen? Versucht die gesuchte Anzahl zu ermitteln!

Eddi hat sich für das Rätselheft unregelmäßige Sudokus ausgedacht. Probiert seine Rätsel zu lösen!

1			2
	4		
		1	
			3

	4		2
			1
	2		
3			

Stellt einige möglichst schwierige unregelmäßige 4-Sudokus her!

Findet unregelmäßige Sudokus, die mit möglichst wenigen vorgegebenen Zahlen eindeutig lösbar sind!

Denkt euch weitere Sudoku-Varianten aus und stellt einige Rätsel her!

Abb. 4: Sudoku selbst gemacht

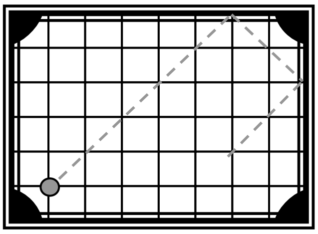
und noch jüngere Schülerinnen und Schüler Erfolg versprechende Bearbeitungsansätze entwickeln (Fritzlar, 2007a).

2.2 Investigations

Die gemäß des britischen Ursprungs (Cockcroft Report, 1982) so genannten Investigations beginnen mit einer Situation, die von den Bearbeitenden zunächst verstanden und exploriert werden muss, oder mit Daten, die organisiert und interpretiert werden müssen. Ihnen kommt insbesondere im Entwickeln von *Forschungsfragen* eine kritische Rolle zu, denen dann möglichst eigenständig nachgegangen werden soll. Dabei bestimmen erst die eigenen Fragestellungen die Bearbeitungsziele, vorgegebene Lösungskriterien gibt es nicht. Aufgrund dieser Kernideen gelten Investigations als stärker divergent oder offener, aber damit auch anspruchsvoller als die Auseinandersetzung mit traditionellen mathematischen Problemstellungen.
Abb. 5 zeigt zwei Beispiele, mit denen in verschiedenen Förderprojekten interessante *Forschungssituationen* aufgebaut werden konnten.

Mathematisches Billard

Auf einem Billardtisch aus $m \times n$ Einheitsquadraten wird ein Ball im Winkel von 45° vom unteren linken Loch abgestoßen.
Wie läuft der Ball?



Forschung auf dem Geobrett

Auf einem Geobrett lassen sich viele verschiedene Vielecke spannen.
Wie hängen die Größe des Vielecks und die Anzahl der benutzten Stifte zusammen?

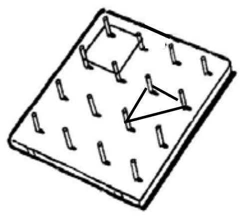


Abb. 5: Investigations[5]

[5] Viele weitere Vorschläge findet man beispielsweise in (Fritzlar et al., 2006).

In den angegebenen Beispielen sind zwar bereits mögliche Forschungsfragen formuliert, diese sind aber zum einen relativ offen – so könnte beim Billard beispielsweise untersucht werden, in welches Loch der Ball schließlich fällt, wie oft er vorher die Bande berührt oder über wie viele Quadrate er insgesamt läuft und beim Geobrett könnten verschiedene Stufen der Genauigkeit als Antwort auf die Fragestellung akzeptiert werden (Abb. 6). Zum anderen können die Fragen in erfahreneren Schülergruppen leicht weggelassen werden. Darüber hinaus sind sie lediglich als Angebote gedacht – beispielsweise interessierte sich beim letzten Einsatz des Materials zum Geobrett Christoph (11 Jahre, 3 Monate) viel stärker für die maximale Anzahl der Ecken eines Vielecks auf einem $n \times n$-Brett. Aber auch bezüglich dieser Fragestellung fand der Fünftklässler interessante Antworten (Fritzlar, im Druck b).

Bei beiden Materialien lassen sich oft hochinteressante Elemente eines Forschungs- oder Theoriebildungsprozesses beobachten – das gezielte Sammeln von Daten, die Suche nach Mustern und Strukturen, das Aufstellen, Überprüfen, Verwerfen und Verbessern von Hypothesen, die Suche nach Begründungen – die mitunter mit längeren Anstrengungen, Enttäuschungen, aber schließlich auch mit großer Freude über die errungenen Ergebnisse verbunden sind.

Zur Illustration zeigt die Abb. 6 wichtige Stufen der Forschungen zum Geobrett, die in einer Gruppe mathematisch begabter Sechstklässler beobachtet werden konnten.[6]

2.3 Theoriebildungsprozesse

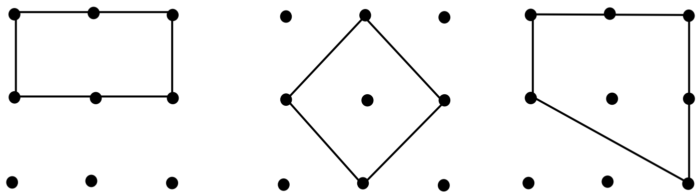
Theoriebildungsprozesse in der Elementarmathematik sind bereits im Abschnitt 1 beschrieben worden. Diese brauchen in der Regel länger, sie sind detaillierter und umfassender als Investigations. Darüber hinaus gibt es zusätzliche Elemente: Es werden (subjektiv) neue Konzepte gebildet, ausgearbeitet und genutzt, neue Methoden werden entwickelt und angewendet, Teilergebnisse werden miteinander verknüpft, es entsteht eine explizit formulierte, an logischen Kriterien orientierte und eventuell noch (beispielsweise hinsichtlich der Eleganz) optimierte Zusammenstellung der Ergebnisse.

---

[6] Die Abbildungen dienen lediglich der Veranschaulichung der Schülerhypothesen. Diese wurden in der Regel auf der Grundlage zahlreicher Beispiele auf größeren Geobrettern formuliert.

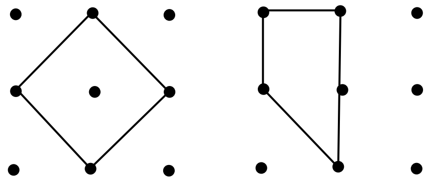
Der Flächeninhalt ist umso größer, je mehr Gitterpunkte im Innern und/oder auf dem Rand des Vielecks liegen.

Es gibt inhaltsgleiche Flächen mit unterschiedlich vielen inneren Punkten (*i*) und umgekehrt Flächen mit gleich vielen inneren Gitterpunkten aber unterschiedlichen Flächeninhalten; also ist auch die Anzahl der Randpunkte (*r*) relevant.



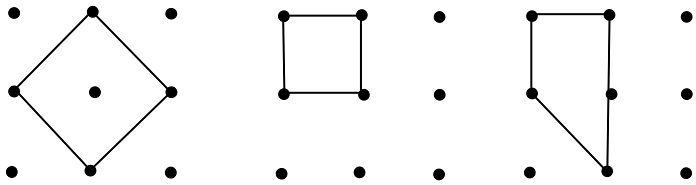
A = 2 FE A = 2 FE A = 3 FE

Der Flächeninhalt kann sich nicht aus der Summe *i*+*r* ergeben.



A = 2 FE A = 1,5 FE

Fügt man einen inneren Gitterpunkt hinzu, vergrößert sich der Flächeninhalt stärker als bei Hinzunahme eines Randpunktes.



A = 2 FE A = 1 FE A = 1,5 FE

Für die Maßzahl des Flächeninhaltes gilt: $A = i + \frac{1}{2} r - 1$.

Abb. 6: Forschungen zum Geobrett

Die folgende Abb. 7 zeigt ein Material, das einen solchen Theoriebildungsprozess initiieren könnte. Obwohl es zunächst „harmlos“ scheint, führt die zweite Fragestellung unmittelbar in das mathematisch sehr reichhaltige Gebiet nichttransitiver Strukturen.

Glücksräder

Ulrike und Daniel spielen mit Glücksrädern gegeneinander; die größere Zahl gewinnt. Ulrikes Rad trägt in jedem Viertel eine Zahl, Daniels Rad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Wer gewinnt wohl dieses Spiel?

Ulrikes Rad Daniels Rad

Stell dir vor, du sollst gegen einen Freund spielen. Dazu stehen die drei abgebildeten Glücksräder zur Auswahl. Zuerst wählst du ein Rad, anschließend dein Gegner. Welches Rad würdest du nehmen?

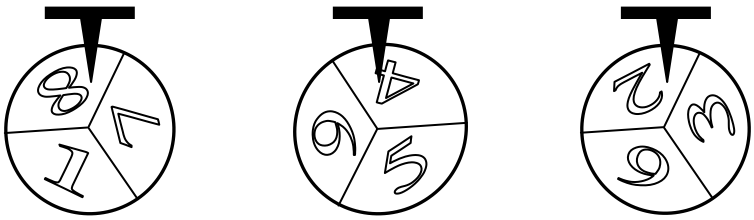


Abb. 7: Glücksräder

Erfahrungen zu (im Sinne von Abb. 1) vollständigen Theoriebildungsprozessen in der Elementarmathematik liegen bisher nur für Schülerinnen und Schüler der Oberstufe vor. Jedenfalls ist für diese ein Mindesterfahrungsschatz notwendig, denn die Ausarbeitung einer Theorie setzt umfangreichere mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten voraus, sie bedarf der Sensibilität, mathematische Fragestellungen zu entwickeln und deren Potenzial zu erkennen – die auch erfahrungsabhängig ist, eines Bedürfnisses nach Begründung und Systematisierung und der Bereitschaft und Fähigkeit zur Formalisierung. Wobei allerdings diesbezüglich zu bedenken ist, dass die optimalen Darstellungen der Fachliteratur in der Regel von Expertinnen und Experten nach langer Bearbeitungszeit angefertigt wurden.

Darüber hinaus verlangt ein Theoriebildungsprozess das erfolgreiche Agieren in einer hochkomplexen Konstellation, was sich auch in zahlreichen kognitionspsychologischen Untersuchungen immer wieder als außerordentlich anspruchsvoll erwiesen hat (Dörner, 1992; Dörner et al., 1983; Frensch & Funke, 1995)

Mit den hier beschriebenen aufeinander aufbauenden Formen von Fördermaterialien ist die Erwartung verbunden, dass sie die Weiterentwicklung mathematikspezifischer Kompetenzen systematisch und nachhaltig unterstützen. Zudem wird deutlich, wie wichtig nicht nur der frühzeitige Beginn der Förderung, sondern darüber hinaus eine *kontinuierliche* Begleitung der mathematisch begabten Kinder und Jugendlichen ist.

Literatur

Asselborn, W., Berg, G., Ganten, D., Hoffmann, K.-H., Daumer, K., Meyer-Galow, E., et al. (1998). Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 66*, 26-40.

Cockcroft Report (1982). *Mathematics counts. Report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools*. London: HMSO.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1986). *Erfahrung Mathematik*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Dörner, D. (1992). *Die Logik des Mißlingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen*. Reinbek: Rowohlt.

Dörner, D., Kreuzig, H. W., Reither, F., & Stäudel, T. (Hrsg.). (1983). *Lohhausen. Vom Umgang mit Unbestimmtheit und Komplexität.* Bern: Huber.

Frensch, P. A., & Funke, J. (Hrsg.). (1995). *Complex problem solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Fritzlar, T. (2003). Zur Sensibilität von Studierenden für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts – eine Herausforderung für die Lehrerausbildung? *Der Mathematikunterricht, 49*(1), 25-41.

Fritzlar, T. (2007a). Sudoku mathematics for and done by younger students. In T. Berta (Hrsg.), *ProMath 2006. Problem solving in mathematics education* (S. 21-36). Debrecen: University of Debrecen.

Fritzlar, T. (2007b). Mathematisches Forschen und Theoriebilden – Konzeptionelle Grundlage für die Förderung mathematischer Begabungen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 250-253). Hildesheim: Franzbecker.

Fritzlar, T., Rodeck, K., & Käpnick, F. (2006). *Mathe für kleine Asse. 5./6. Schuljahr*. Berlin: Cornelsen.

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen – Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile*. Münster: LIT-Verlag.

Glasersfeld, E. v. (1998). *Radikaler Konstruktivismus. Ideen, Ergebnisse, Probleme*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik, 38*(1), 173-198.

Heinze, A. (2005). *Lösungsverhalten mathematisch begabter Kinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen*. Münster: LIT-Verlag.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: Lang Verlag.

Kießwetter, K. (1992). Mathematische Begabung – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. *Der Mathematikunterricht, 38*(1), 5-18.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren – und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschülern erwarten, und was noch nicht? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (S. 128–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Kießwetter, K., & Nolte, M. (1996). Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28*(5), 143-157.

Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: an unknown quantity? In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 101–114). New York: Macmillan.

Nolte, M. (Hrsg.). (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans*. Hildesheim: Franzbecker.

Pehkonen, E. (2004). State-of-the-Art in problem solving: Focus on open problems. In H. Rehlich & B. Zimmermann (Hrsg.), *ProMath Jena 2003. Problem solving in mathematics education* (S. 93-111). Hildesheim: Franzbecker.

Pólya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Spitzer, M. (2002). *Lernen: Gehirnforschung und Schule des Lebens*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Stern, E., Grabner, R., Schumacher, R., Neuper, C., & Saalbach, H. (2005). *Lehr-Lern-Forschung und Neurowissenschafte – Erwartungen, Befunde, Forschungsperspektiven*. Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Waldmann, M., & Weinert, F. E. (1990). *Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung*. Göttingen: Hogrefe.

Weinert, F. E., & Waldmann, M. R. (1986). How do the gifted think: Intellectual abilities and cognitive processes. In A. J. Cropley, K. K. Urban, H. Wagner & W. Wieczerkowski (Hrsg.), *Giftedness: A continuing worldwide challenge* (S. 49-64). New York: Trillium Press.

Zimmermann, B. (1991a). *Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse.* Hamburg: Universität Hamburg.

Zimmermann, B. (1991b). Offene Probleme für den Mathematikunterricht und ein Ausblick auf Forschungsfragen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *23*(2), 38-46.

Zimmermann, B. (2001). On some issues on mathematical problem solving from an European perspective. In E. Pehkonen (Hrsg.), *Problems solving around the world, Proceedings of the topic Study Group 11 (Problem solving in mathematics education) at the ICME-9 meeting August 2000 in Japan* (Vol. Report Series C: 14, S. 55-64). Turku: University of Turku. Faculty of Education, Department of Teacher Education.